Existenz streng monotoner Folgen in geordneten Mengen

Kaluza, Theodor

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 28, 1977, S.55-57

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Existenz streng monotoner Folgen in geordneten Mengen

Von **Theodor Kaluza,** Hannover

Sei $M_{\leq}$ eine durch die Relation $\leq$ geordnete Menge. Eine Folge (a_n) von Elementen $a_n \in M$ heißt *eine streng monotone Folge in* $M_{\leq}$, wenn

$$\text{für } n < n' \text{ entweder stets } a_n < a_{n'} \text{ (in } M_{\leq}) \\ \text{oder stets } a_n > a_{n'}$$

ist.

Satz 1: In jeder total geordneten unendlichen Menge gibt es streng monotone Folgen.

Beweis: Es genügt, die Existenz einer nicht-leeren Teilmenge ohne erstes oder ohne letztes Element nachzuweisen.

Sei M unendlich und durch $\leq$ total (vollständig) geordnet. Wir nennen $a \in M$ ein L-Element, wenn es in M unendlich viele $b < a$ gibt:

Fall 1: Es gibt kein L-Element: dann hat M selbst kein letztes Element, – denn ein solches wäre ein L-Element, weil M unendlich ist.

Fall 2: Es gibt L-Elemente, aber unter ihnen kein erstes: dann ist die Menge der L-Elemente von der gesuchten Art.

Fall 3: Es gibt ein erstes L-Element l_o: dann ist die Teilmenge $B_o = \{b \mid b < l_o\} \subset M$ unendlich und hat kein letztes Element, – denn ein solches wäre ein L-Element vor l_o. □

Lemma: Ist F eine Folge, T eine Teilfolge von F und PT eine Permutation von T, so enthalten F, T und PT eine gemeinsame Teilfolge.

Beweis: Da es sich um eine Aussage über die Index-Folgen handelt, können wir o. B. d. A. $F = \mathbb{N} \equiv O < 1 < \ldots < n < \ldots$ wählen. Sei dann $T \equiv n_o < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ eine Teilfolge und $PT \equiv m_o, m_1, \ldots, m_i, \ldots$ eine Permutation von T. Da jede Teilfolge von T auch Teilfolge von F ist, genügt es, eine gemeinsame Teilfolge von T und PT festzustellen: es sei k(i) *der* Index in T, für den bei der Permutation

$$m_i = n_{k(i)}$$

ist; eine gemeinsame Teilfolge $(m_{i_p}) = (n_{k(i_p)})$ von T und PT liefert dann jede Indexfolge

$$i_o < i_1 < \ldots < i_p < \ldots$$

für die

$$k(i_o) < k(i_1) < \ldots < k(i_p) < \ldots$$

ist; – und solche Indexfolgen gibt es, denn nach Wahl von geeigneten Indizes $i_o < \ldots < i_p$ ($p \geq O$ und i_o beliebig) gibt es jeweils nur endlich viele $i > i_p$, für die $k(i) \leq k(i_p)$ ist. □

Satz 2: Es sei M eine total geordnete Menge und (a_n) eine Folge in M; wenn (a_n) unendlich viele paarweise verschiedene Glieder hat, dann enthält (a_n) eine streng monotone Teilfolge.

Beweis: Die *Menge* $\{a_o, a_1, \ldots\}$ hat nach Voraussetzung unendliche viele Elemente, – manche davon vielleicht mehrfach aufgezählt –, und enthält daher nach Satz 1 eine streng monotone Folge $b_o, b_1, \ldots$; diese Folge ist eine Permutation einer Teilfolge der *Folge* $a_o, a_1, \ldots$, und hat daher nach dem Lemma mit (a_n) eine gemeinsame Teilfolge, die als Teilfolge von $b_o, b_1, \ldots$ streng monoton ist. □

Die mögliche Anwendung unserer Sätze bei der Behandlung reeller Zahlenfolgen deutet die folgende Beweis-Skizze für den nicht-trivialen Teil des CAUCHY-schen Kovergenzkriteriums an:

Jede C-Folge ist beschränkt; wenn sie nicht schließlich konstant ist, enthält sie nach Satz 2 eine (streng) monotone und also konvergente Teilfolge; – der Rest liegt auf der Hand.

Es seien $M_o, M_1, \ldots$ endlich oder abgezählt unendlich viele total geordnete Mengen und X ihr der Abzählung entsprechendes kartesisches Produkt. Wir nennen dann eine Folge (a_n) von Punkten $a_n = (x_o^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots) \in X$ *streng monoton,* wenn für jedes k die Folge der k-ten Komponenten $(x_k^{(n)}) \subset M_k$ in M_k streng monoton ist. Eine Menge $P \subset X$ und ebenso eine Folge $F = (a_n) \subset X$ nennen wir *total gestreut,* wenn je zwei verschiedene Elemente von P bzw. Glieder von F sich *in allen Komponenten* unterscheiden.

Satz 3: Ist $X = M_o \times \ldots \times M_q$ das kartesische Produkt endlich vieler total geordneter Mengen, so enthält jede total gestreute unendliche Menge $P \subset X$ eine streng monotone Folge, und jede total gestreute Folge $F \subset X$ eine streng monotone Teilfolge.

Beweis: Nach Satz 1 enthält P eine Folge und nach Satz 2 F eine Teilfolge, bei der die Komponenten $x_o^{(n)}$ streng monoton verlaufen; nach Satz 2 enthält diese Folge eine Teilfolge, bei der auch die Komponenten $x_1^{(n)}$ streng monoton verlaufen; … . □

Satz 4: Sei $X = M_o \times \ldots \times M_q \times \ldots$ das kartesische Produkt abgezählt unendlich vieler total geordneter unendlicher Mengen; dann gilt

(a) jede total gestreute unendliche Menge $P \subset X$ enthält eine Folge und jede total gestreute Folge $F \subset X$ eine Teilfolge, bei der für jedes k die Folge der k-ten Komponenten *schließlich* streng monoton verläuft;

(b) es gibt total gestreute Folgen (Mengen), die *keine* streng monotone Teilfolge (Folge) enthalten.

Beweis: (a) Führe das Verfahren im Beweis zu Satz 3 als vollständige Induktion durch: die Diagonal-Folge hat dann die behauptete Eigenschaft;

(b) nach Satz 1 gibt es in jeder der Mengen M_k eine Teilmenge vom Ordnungstyp ω_o oder ω_o^*. Es genügt daher, ein Beispiel für den Fall anzugeben, daß alle

$$M_k = \{0, 1, 2, \ldots\} \text{ oder } = \{\ldots, -2, -1, 0\}$$

sind: wähle hier als Folge der k-ten Komponenten

$x_k^{(n)} = k, k-1, \ldots, 1, 0, k+1, k+2, \ldots$

bzw. $x_k^{(n)} = -k, -(k-1), \ldots, -1, 0, -(k+1), -(k+2), \ldots;$

dann ist die Folge $a_n = (x_o^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots)$ total gestreut; ist nun $a_{n_o}, a_{n_1}, \ldots$ eine beliebige Teilfolge, so verläuft die Folge $(x_k^{(n_i)})$ der k-ten Komponenten für kein $k > n_o$ streng monoton; allgemein verläuft sie für $k > n_i$ frühestens vom i-ten Gliede an streng monoton.

Die Behauptung für *Mengen* läßt sich auf dieses Folgen-Beispiel zurückführen: die *Menge* $P = \{a_o, a_1, \ldots\}$ enthält keine streng monotone Folge, – denn bei einer solchen müßten die Komponenten $x_o^{(j)}$ streng monoton verlaufen und wären daher notwendig eine Teilfolge der streng monotonen Folge $x_o^{(0)}, x_o^{(1)}, \ldots$, und damit wäre die hypothetische Folge eine Teilfolge der *Folge* $a_o, a_1, \ldots$, von der wir oben sahen, daß sie keine streng monotonen Teilfolgen hat. □

Daß wir bei den Bezeichnungen vor Satz 3 und im Satz 4 „abgezählt“ anstelle von „abzählbar“ sagten, geschah zur Abkürzung der Beweise; die Definitionen bleiben sinnvoll und die Aussagen wahr, auch wenn es sich um anders oder garnicht geordnete kartesische Produkte aus abzählbar vielen Mengen handelt, – für die Beweise hat man sich dann eine Abzählung vollzogen zu denken, um die Induktionen möglich zu machen.